

УДК 629.5.017
EDN FOJTIH

ПОСТРОЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ АППРОКСИМАЦИИ НАБОРА ДИАГРАММ СТАТИЧЕСКОЙ ОСТОЙЧИВОСТИ АВТОНОМНОГО СУДНА

С.В. Шульц, аспирант, Санкт-Петербургский государственный морской технический университет, 190121 Россия, Санкт-Петербург, Лотманская ул., 3, e-mail: svsch9@yandex.ru

М.А. Кутейников, д-р техн. наук, Российский морской регистр судоходства, 191186 Россия, Санкт-Петербург, Миллионная ул., 7А, e-mail: kuteynikov.ma@rs-class.org

В.Ю. Шульц, канд. физ.-мат. наук, Санкт-Петербургский государственный морской технический университет, 190121 Россия, Санкт-Петербург, Лотманская ул., 3, e-mail: vysch@yandex.ru

Актуальность выбранной темы исследования объясняется активным развитием автономного судовождения и необходимостью решения задач, возникающих в процессе эксплуатации морских автономных надводных судов. Разрабатываемая в рамках диссертационного исследования математическая модель экспресс-оценки характеристик качки судна на нерегулярном морском волнении предполагает наличие метода для вычисления плеча остойчивости в зависимости от угла крена и осадки. В данной работе рассмотрены математические методы аппроксимации поверхности, применимые для обработки неравномерно распределенных данных; построены аппроксимации поверхности, образованной набором диаграмм статической остойчивости, соответствующих различным случаям нагрузки масс судна, проведено сравнение полученных результатов. Сделан вывод, что наилучшими для данной задачи аппроксимационными способностями обладают методы, основанные на кубических и бигармонических сплайнах.

Ключевые слова: автономное судно, аппроксимация поверхности, бигармонический сплайн, кубический сплайн, тонкий пластинчатый сплайн, диаграмма статической остойчивости.

Для цитирования: Шульц С.В. Построение пространственной аппроксимации набора диаграмм статической остойчивости автономного судна / С.В. Шульц, М.А. Кутейников, В.Ю. Шульц // Научно-технический сборник Российского морского регистра судоходства. — 2025. — № 80. — С. 82 — 93. — EDN FOJTIH.

CONSTRUCTION OF A SPATIAL APPROXIMATION OF A SET OF DIAGRAMS OF STATIC STABILITY OF AN AUTONOMOUS SHIP

S.V. Shults, PhD student, St. Petersburg State Marine Technical University, 190121 Russia, St. Petersburg, Lotsmanskaya ul., 3, e-mail: svsch9@yandex.ru

M.A. Kuteynikov, DSc, Russian Maritime Register of Shipping, 191186 Russia, St. Petersburg, Millionnaya ul., 7A, e-mail: kuteynikov.ma@rs-class.org

V.Yu. Shults, PhD, St. Petersburg State Marine Technical University, 190121 Russia, St. Petersburg, Lotsmanskaya ul., 3, e-mail: vysch@yandex.ru

The relevance of the chosen research topic is explained by the active development of autonomous navigation and the need to solve tasks arising during the operation of marine autonomous surface ships. The mathematical model developed as a part of the research for the operational assessment of ship motion characteristics in irregular seas suggests a method for calculating the righting arm depending on the angle of roll and draft. In this paper, mathematical methods of surface approximation are considered, applicable for processing nonuniformly distributed data; approximations of the surface formed by a set of static stability diagrams corresponding to different cases of vessel mass loading are constructed, and the results obtained are compared. It is concluded that the methods based on cubic and biharmonic splines have the best approximation capabilities for this task.

Keywords: autonomous vessel, surface fitting, biharmonic spline, cubic spline, thin-plate spline, static stability diagram.

For citation: Shults S.V., Kuteynikov M.A., Shults V.Yu. Construction of a spatial approximation of a set of diagrams of static stability of an autonomous ship. *Research Bulletin by Russian Maritime Register of Shipping*. 2025. No. 80. P. 82 — 93. EDN FOJTIH. (In Russ.)

ВВЕДЕНИЕ

Развитие автономных навигационных систем предвещает новую эру в морских перевозках, обещая повышение экономической эффективности и снижение влияния человеческого фактора на безопасность мореплавания [1, 2].

Безопасная эксплуатация автономного судна предъявляет жесткие требования к бортовым системам принятия решений: автономная система не может полагаться на интуицию и должна основывать свои решения на надежных вычислительных моделях, работающих в режиме реального времени.

Важными задачами являются предотвращение потери остойчивости (опрокидывания, брочинга) [3], навала на другие суда. Таким образом, разработка надежного и высокопроизводительного метода оценки и предсказания параметров качки судна на нерегулярном волнении является важным и актуальным направлением исследований.

Как было показано ранее [4], недостатком существующих нейросетевых методов оценки и предсказания параметров качки является то, что результаты расчетов, получаемые с их помощью, имеют существенную погрешность прогнозирования параметров качки судна вблизи экстремумов кривой углов бортовой и килевой качки, что обусловлено тем, что данные модели не содержат в себе физики процесса качки, а потому дают недостоверные результаты, когда параметры входного процесса выходят за границы аппроксимационных возможностей модели или за границы «изученного» материала.

Разрабатываемая в рамках диссертационного исследования математическая модель экспресс оценки характеристик качки судна на нерегулярном морском волнении предполагает наличие метода для вычисления плеча остойчивости в зависимости от угла крена и осадки судна. Взаимосвязь между этими переменными в своей сути сложна и нелинейна.

Таким образом, практическая задача, решаемая в данном исследовании, состоит в построении непрерывной, эффективной с вычислительной точки зрения функции $I(\theta, T)$, которая с достаточной точностью представляет весь массив дискретных, предварительно рассчитанных данных о статической остойчивости судна.

В данной работе рассмотрены математические методы аппроксимации поверхностей, широко используемые для решения практических задач, связанных с обработкой нерегулярных, неравномерно распределенных данных; проведено моделирование и сравнение результатов построения аппроксимирующей поверхности, образованной набором диаграмм статической остойчивости, соответствующих различным типовым случаям загрузки железнодорожного паромов, оснащенного техническими средствами автономного судовождения.

1. МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИИ ПОВЕРХНОСТИ

В рамках данного исследования для построения аппроксимации поверхности были выбраны следующие математические методы:

- кусочно-линейная интерполяция. Широко применяется в задачах обработки изображений [5], лазерных проекционных системах [6, 7];
- полиномиальная аппроксимация. Данный метод используется в медицине для реконструкции в высоком разрешении изображений, полученных в результате проведения магнитно-резонансной томографии [8, 9];
- кубическая сплайн-интерполяция. Данный метод применяется для решения задач в нефтегазовой отрасли [10], геофизике [11] для моделирования природных резервуаров углеводородов;
- тонкопластинчатая сплайн-интерполяция. Данный метод нашел применение в задачах обработки изображений для учета нелинейных искажений [12], для моделирования деформаций антенн космических аппаратов [13];
- бигармоническая сплайн-интерполяция. Успешно используется для решения самых различных задач в области геодезии и батиметрии [14], изучения приливных течений [15] и солнечной радиации [16], моделирования характеристик фотоэлектрических модулей [17].

1.1 Кусочно-линейная интерполяция.

Линейная интерполяция позволяет построить поверхность по заданному набору точек путем нахождения коэффициентов соответствующего линейного многочлена. На исходном множестве точек выполняется построение триангуляции Делоне, затем для каждой тройки вершин строится свой линейный многочлен. В m -мерном случае он может выглядеть следующим образом:

$$\sum_{\vec{i}=0}^{\vec{1}} f(\vec{x}_{\vec{i}}) \prod_{k=1}^m \begin{cases} \vec{i}_k, & \vec{i}_k = 0 \\ 1 - \vec{i}_k, & \vec{i}_k \neq 0 \end{cases}$$

$$\vec{i} = \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{\vec{x}_1 - \vec{x}_0},$$

где векторные индексы означают выбор дискретных точек, скалярные — выбор компоненты вектора, $\vec{1}$ — вектор единиц, $\vec{0}$ — вектор нулей.

Пусть каждой тройке точек из исходного набора сопоставлены радиус-векторы $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{r}_3 = (x_3, y_3, z_3)$, тогда положение любой точки внутри данного треугольника может быть вычислено с помощью барицентрической интерполяции [18]:

$$\vec{r} = t_1 \vec{r}_1 + t_2 \vec{r}_2 + t_3 \vec{r}_3$$

$$f(\vec{r}) = \gamma_1 f(\vec{r}_1) + \gamma_2 f(\vec{r}_2) + \gamma_3 f(\vec{r}_3)$$

$$\gamma_1 = \frac{(\vec{r} - \vec{r}_3) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_3)}{(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_3)}$$

$$\gamma_2 = \frac{(\vec{r} - \vec{r}_3) \times (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)}{(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_3)}$$

$$\gamma_3 = \frac{(\vec{r} - \vec{r}_3) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_3)}$$

Быстрый и вычислительно простой метод. Результирующая поверхность C^0 непрерывна (не имеет разрывов, но не является гладкой).

1.2. Полиномиальная аппроксимация.

Полиномиальная аппроксимация позволяет построить гладкую поверхность по заданному набору точек путем построения аппроксимирующего многочлена степени n следующего вида [19]:

$$z = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 y + a_5 x y^2 + a_6 x^2 y^2 + \dots + a_{(2n+2)} x^n y^n.$$

Определение коэффициентов многочлена может быть выполнено с помощью линейного метода наименьших квадратов, то есть путем минимизации суммы квадратов остатков:

$$\sum_{i=0}^n (\alpha + \beta x_i + \varepsilon_i - f(x_i))^2 \rightarrow \min.$$

Данный метод позволяет получить элегантное решение в виде единого аналитического выражения для вычисления значения z в любой точке (x, y) .

Кроме того, полиномы бесконечно дифференцируемы, поэтому результирующая поверхность C^∞ непрерывна (бесконечно дифференцируемая).

1.3. Кубическая сплайн-интерполяция.

Кубическая сплайн-интерполяция позволяет построить гладкую поверхность [20, 21] по заданному набору точек путем нахождения коэффициентов соответствующего кубического многочлена. На исходном множестве точек выполняется построение триангуляции Делоне, затем для каждой тройки вершин строится свой кубический многочлен. Получаемая поверхность удовлетворяет бигармоническому уравнению и, как следствие, имеет минимальную кривизну [22]. Интерполирующий многочлен может быть записан в следующем виде [23]:

$$f_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3,$$

$$a_i = f_i(x_i),$$

$$b_i = f'_i(x_i),$$

$$c_i = 3 \frac{f_i(x_{i+1}) - f_i(x_i)}{\alpha_i^2} - 2 \frac{f'_i(x_i)}{\alpha_i} - \frac{f'_i(x_{i+1})}{\alpha_i},$$

$$d_i = 2 \frac{f_i(x_i) - f_i(x_{i+1})}{\alpha_i^2} - \frac{f'_i(x_i)}{\alpha_i} - \frac{f'_i(x_{i+1})}{\alpha_i},$$

$$\alpha_i = x_{i+1} - x_i.$$

В отличие от полиномиальной интерполяции, когда строится один многочлен высокой степени, сплайн-интерполяция использует комбинацию полиномов более низкой (в данном случае третьей) степени с дополнительным условием равенства производных этих полиномов на границах промежутка, которое обеспечивает гладкость функции. Такой подход позволяет решить проблему ограниченной локальной гибкости полиномов.

Результирующая поверхность C^2 непрерывна (непрерывны первая и вторая производные).

1.4. Тонкопластинчатая сплайн-интерполяция.

Тонкопластинчатая сплайн-интерполяция (англ. thin-plate spline) позволяет построить гладкую поверхность по заданному набору точек путем минимизации «энергии изгиба» тонкого металлического листа (тонкой пластины), «прижатого» к точкам этого набора.

Для заданного набора из N точек данных дифференциальное уравнение, моделирующее тонкую пластину (англ. thin plate), выглядит следующим образом:

$$f_i = \iint \left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 \right) dx dy,$$

где $i \in \{1 \dots N\}$, f_i — сила прижима в i -й точке.

При построении аппроксимации вводится функция полной энергии системы E , минимизация которой позволяет контролировать отклонение построенной поверхности от исходного набора точек [24]:

$$E^2 = \sum (z_i - f(x_i, y_i))^2 + \beta^2 \iint \left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 \right) dx dy,$$

где β — регуляризующий параметр, используемый для достижения более или менее гладкого решения в зависимости от задачи. Выбор малого значения β приводит к хорошему приближению данных, тогда как выбор большого значения β приводит к более гладкому решению.

В отличие от кубической сплайн-интерполяции в данном случае не требуется предварительное выполнение триангуляции на исходном наборе точек. Результирующая поверхность C^∞ непрерывна.

1.5. Бигармоническая сплайн-интерполяция.

Бигармоническая сплайн-интерполяция позволяет построить поверхность минимальной кривизны по заданному набору точек, представляя эту поверхность в виде линейной комбинации бигармонических функции Грина с центром в каждой точке набора данных.

Амплитуды функций Грина определяются путем решения линейной системы, которая гарантирует, что результирующая поверхность проходит через исходные точки [14].

Функция Грина для сплайна в одном измерении удовлетворяет бигармоническому уравнению:

$$\frac{d^4 \phi}{dx^4} = 6\delta(x). \quad (1)$$

Частным решением для (1) является:

$$\phi(x) = |x|^3. \quad (2)$$

Когда данная функция Грина используется для интерполяции N точек данных w_i , расположенных в x_i , уравнение (1) можно записать в виде:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \sum_{j=1}^N 6a_j \delta(x - x_j), \quad (3)$$

$$w(x_i) = w_i, \quad (4)$$

$$w(x) = \sum_{j=1}^N a_j |x - x_j|^3, \quad (5)$$

$$w_i = \sum_{j=1}^N a_j |x_i - x_j|^3. \quad (6)$$

Частным решением (3) и (4) является линейная комбинация функций Грина, центрированных в каждой точке набора данных. Коэффициенты a_j определяются путем решения линейной системы (6). Как только они определены, бигармоническая функция $w(x)$ может быть вычислена в любой точке с помощью уравнения (5).

В более общем случае с m измерениями и N точками задача выглядит следующим образом:

$$\nabla^4 w(x) = \sum_{j=1}^N a_j \delta(x - x_j),$$

$$w(x_i) = w_i,$$

где ∇^4 — бигармонический оператор,
 x — позиция в m -мерном пространстве.

Общее решение можно записать в виде:

$$w(x) = \sum_{j=1}^N a_j \phi_m(x - x_j),$$

$$w_i(x) = \sum_{j=1}^N a_j \phi_m(x_i - x_j).$$

Функция Грина ϕ_m и ее градиент $\nabla \phi_m$ для m -мерного пространства задаются следующими выражениями:

$$\phi_m = |x|^{4-m},$$

$$\nabla \phi_m = (4-m)x|x|^{2-m}.$$

Метод не требует предварительного построения триангуляции на исходном наборе точек. Результирующая поверхность C^2 непрерывна [25].

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

2.1. Описание исходных данных.

Набор данных для построения аппроксимации состоял из 2455 точек (рис. 1), соответствующих плечам остойчивости при различных сочетаниях осадки и угла крена железнодорожного паромов, оснащенных техническими средствами автономного судовождения.

Данные получены путем оцифровки диаграмм статической остойчивости для всех типовых случаев загрузки.

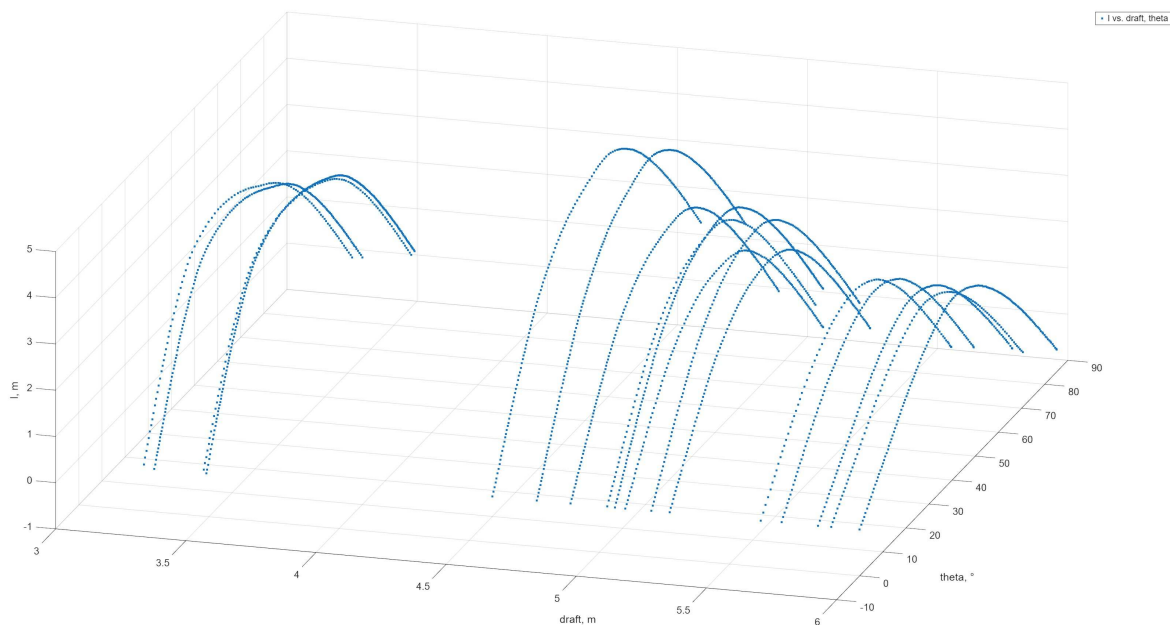


Рис. 1. Распределение точек в исходном наборе данных для построения аппроксимирующей поверхности. Зависимость плеча остойчивости от осадки и крена. Ось draft — осадка [м], ось theta — угол крена [град.], ось l — плечо остойчивости [м]

2.2. Метрики оценки аппроксимаций.

Оценка точности каждого метода выполнялась на основании двух метрик: коэффициента детерминации R^2 и суммы квадратов ошибок (SSE).

Коэффициент детерминации отражает меру качества регрессионной модели $f: X \rightarrow Y$, описывающей связь между зависимой и независимыми переменными модели, и определяется как доля дисперсии зависимой переменной, объясненная регрессионной моделью с данным набором независимых переменных.

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{\sum_i (y_i - \hat{y})^2}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2},$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_i y_i}{n},$$

$$\hat{y}_i = f(x_i),$$

где: $SSE = \sum_i (y_i - \hat{y})^2$ — сумма квадратов ошибок (англ. sum square of errors),
 $SST = \sum_i (y_i - \bar{y})^2$ — сумма квадратов отклонений от среднего (англ. sum square total).

Значение метрики R^2 лежит на отрезке $[0,1]$, причем аппроксимация тем качественнее, чем ближе значение метрики к единице. В случае, когда $R^2 = 1$, между переменными X и Y существует линейная функциональная зависимость, а в случае $R^2 = 0$ вариация зависимой переменной обусловлена исключительно неучтенными факторами.

2.3. Кусочно-линейная интерполяция.

На рис. 2 показана поверхность, построенная с помощью кусочно-линейной интерполяции, а на рис. 3 — ее контурное изображение.

Построенная поверхность является простейшей геометрической интерполяцией между исходными точками, поэтому значения $R^2 = 1,0$ и $SSE = 0,0$ абсолютно ожидаемы.

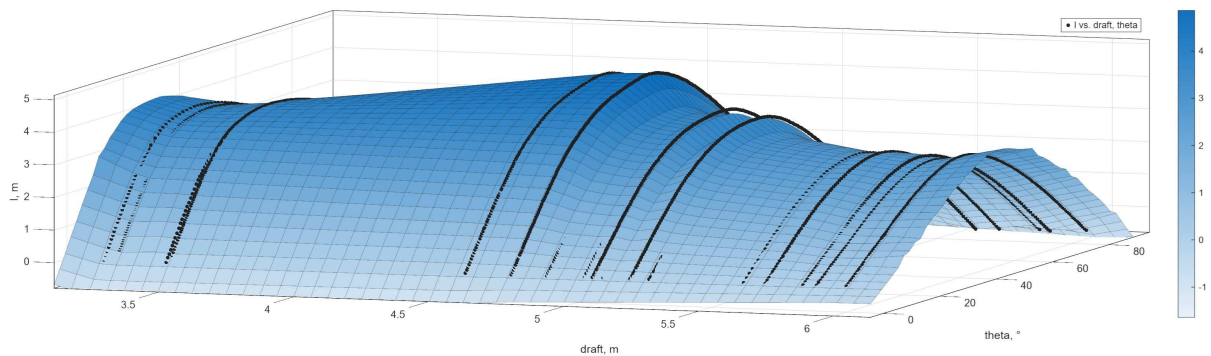


Рис. 2. Вид поверхности, построенной кусочно-линейной интерполяцией. Ось draft — осадка [м], ось theta — угол крена [град.], ось l — плечо устойчивости [м], цветовая шкала по оси l. Черным отражены точки исходного набора данных

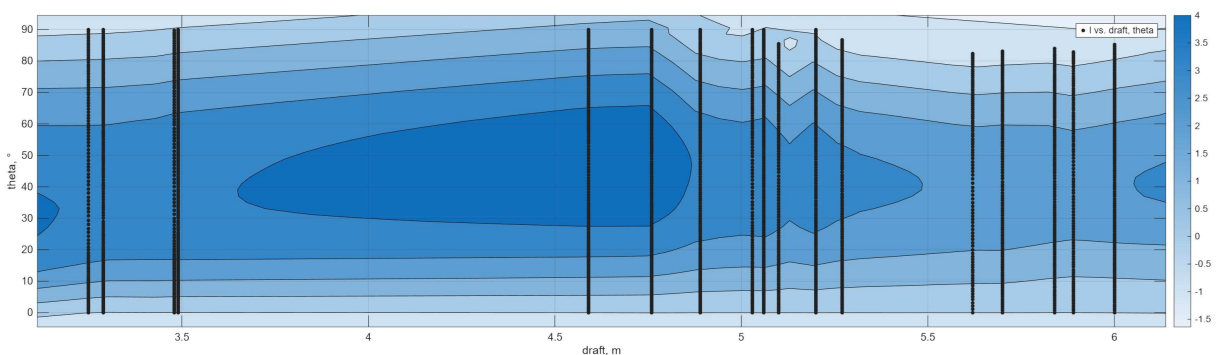


Рис. 3. Контурное изображение поверхности, построенной кусочно-линейной интерполяцией. Ось draft — осадка [м], ось theta — угол крена [град.], ось l — плечо устойчивости [м], цветовая шкала по оси l

Основным недостатком метода в рамках решаемой задачи является то, что первая производная терпит разрыв на границах треугольников, составляющих аппроксимирующую поверхность, что затрудняет дальнейшее практическое применение полученного результата.

2.4. Полиномиальная аппроксимация.

На рис. 4 показана поверхность, построенная с помощью полиномиальной аппроксимации с полиномом третьего порядка, а на рис. 5 — ее контурное изображение.

Очевидно, что характер исходных данных не позволяет с помощью полинома третьего порядка построить сколь-нибудь качественное приближение поверхности к исходным точкам, $R^2 = 0,93475$ и $SSE = 255,800$.

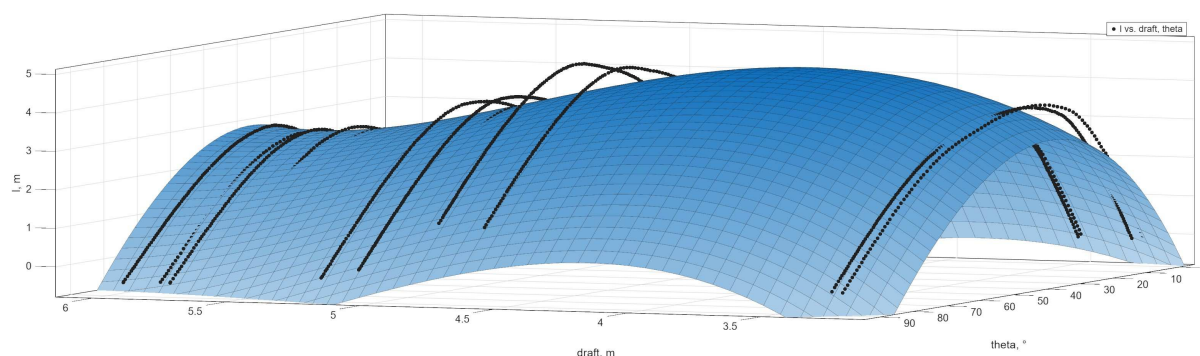


Рис. 4. Вид поверхности, построенной полиномиальной аппроксимацией с полиномом третьего порядка.
Ось draft — осадка [м], ось theta — угол крена [град.], ось l — плечо остойчивости [м], цветовая шкала по оси l.
Черным отражены точки исходного набора данных

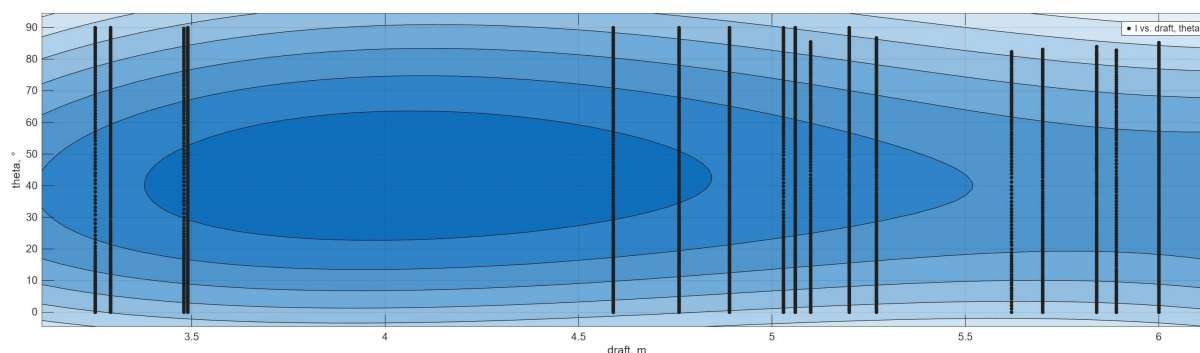


Рис. 5. Контурное изображение поверхности, построенной полиномиальной аппроксимацией с полиномом третьего порядка.
Ось draft — осадка [м], ось theta — угол крена [град.], ось l — плечо остойчивости [м], цветовая шкала по оси l

Применение полинома более высокого порядка улучшает точность, но не дает качественно другого результата. На рис. 6 показана поверхность, построенная с помощью полиномиальной аппроксимации с полиномом пятого порядка, а на рис. 7 — ее контурное изображение. По-прежнему заметны существенные отклонения от данных, $R^2 = 0,97127$ и $SSE = 112,640$.

Полиномиальная аппроксимация не позволяет учитывать сложные локальные особенности исходных данных, так как локальные отклонения не могут быть учтены без резкого изменения формы всей поверхности.

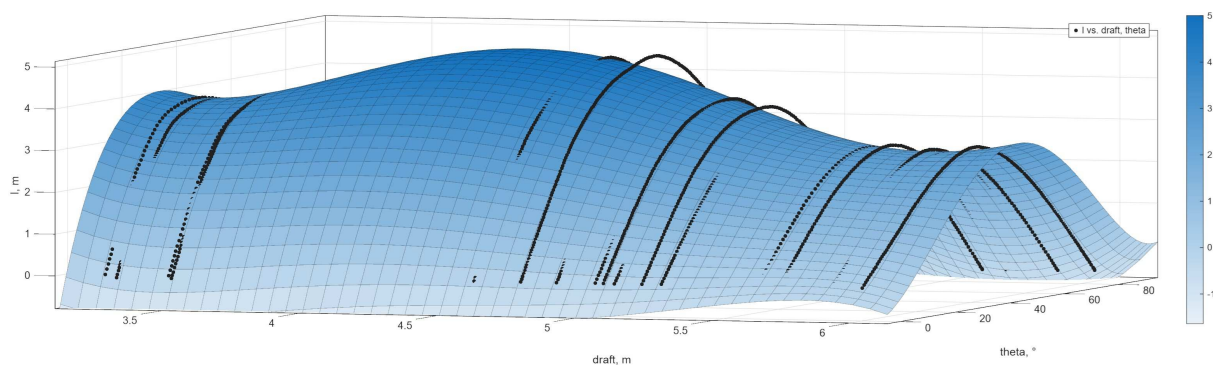


Рис. 6. Вид поверхности, построенной полиномиальной аппроксимацией с полиномом пятого порядка. Ось draft — осадка [м], ось theta — угол крена [град.], ось l — плечо устойчивости [м], цветовая шкала по оси l. Черным отражены точки исходного набора данных

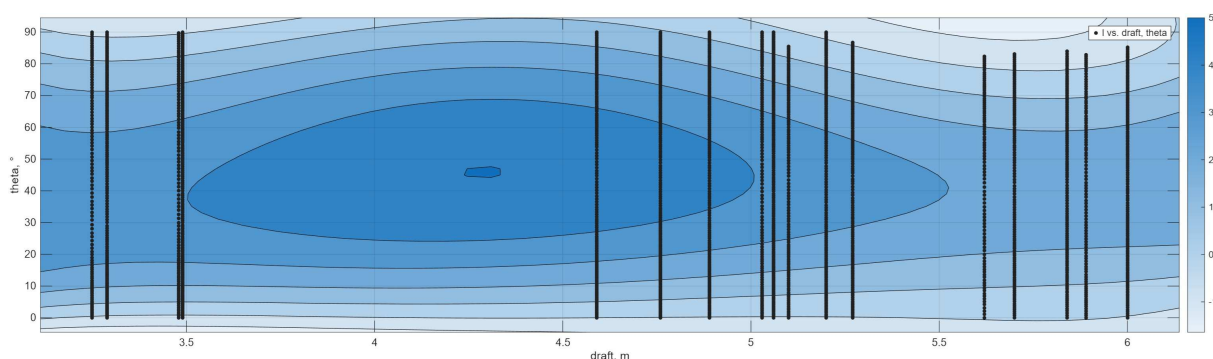


Рис. 7. Контурное изображение поверхности, построенной полиномиальной аппроксимацией с полиномом пятого порядка. Ось draft — осадка [м], ось theta — угол крена [град.], ось l — плечо устойчивости [м], цветовая шкала по оси l

2.5. Кубическая сплайн-интерполяция.

На рис. 8 показана поверхность, построенная с помощью кубической сплайн-интерполяции, а на рис. 9 — ее контурное изображение.

Заметно намного более качественное приближение и учет локальных особенностей исходных данных по сравнению с полиномиальной аппроксимацией, $R^2 = 1,0$ и $SSE = 4,454 \cdot 10^{-29}$.

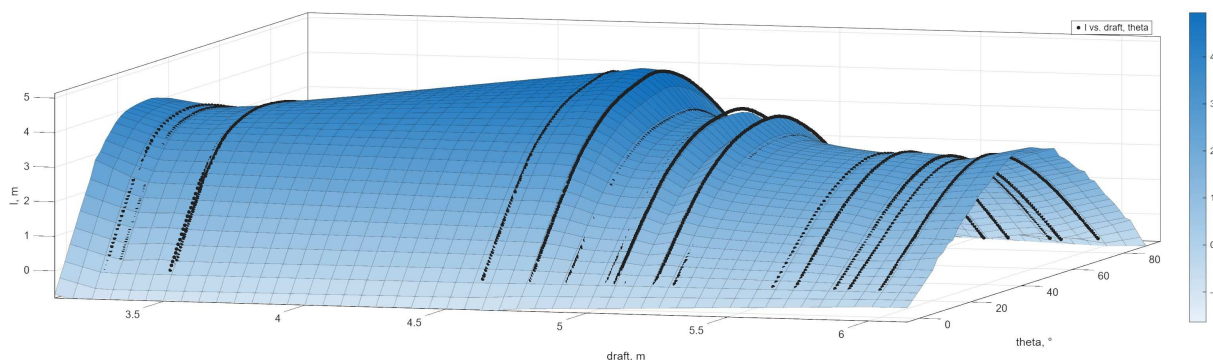


Рис. 8. Вид поверхности, построенной кубической сплайн-интерполяцией. Ось draft — осадка [м], ось theta — угол крена [град.], ось l — плечо устойчивости [м], цветовая шкала по оси l. Черным отражены точки исходного набора данных

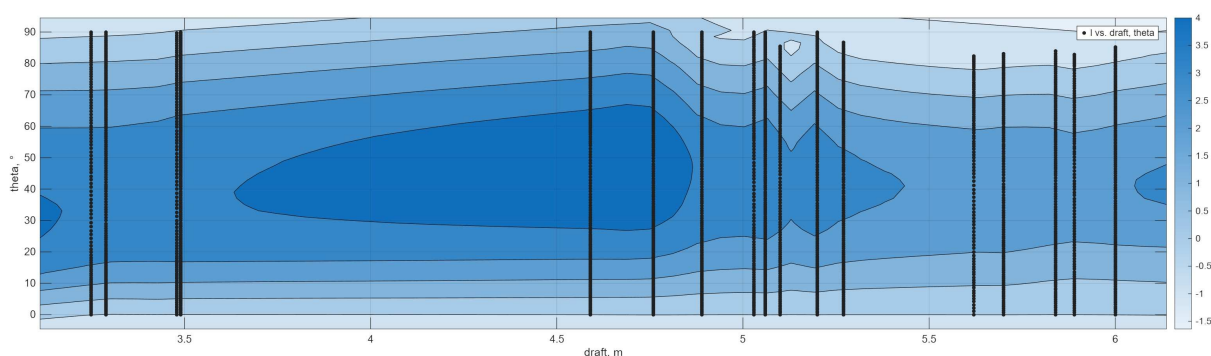


Рис. 9. Контурное изображение поверхности, построенной кубической сплайн-интерполяцией. Ось draft — осадка [м], ось theta — угол крена [град.], ось l — плечо остойчивости [м], цветовая шкала по оси l

2.6. Тонкопластинчатая сплайн-интерполяция.

На рис. 10 показана поверхность, построенная с помощью тонкопластинчатой сплайн-интерполяции, а на рис. 11 — ее контурное изображение.

Данный метод показал точность аппроксимации, существенно уступающую полученной с помощью кубической сплайн-интерполяции, $R^2 = 0,93648$ и $SSE = 249,030$.

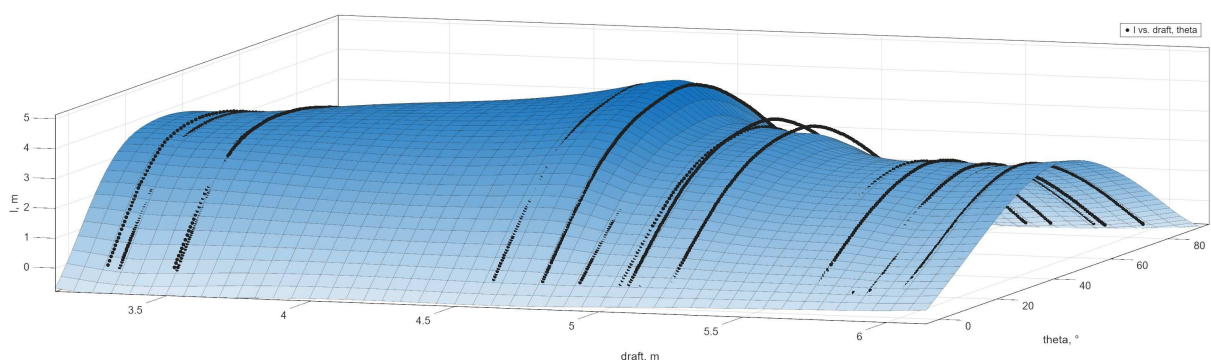


Рис. 10. Вид поверхности, построенной тонкопластинчатой сплайн-интерполяцией. Ось draft — осадка [м], ось theta — угол крена [град.], ось l — плечо остойчивости [м], цветовая шкала по оси l.
Черным отражены точки исходного набора данных

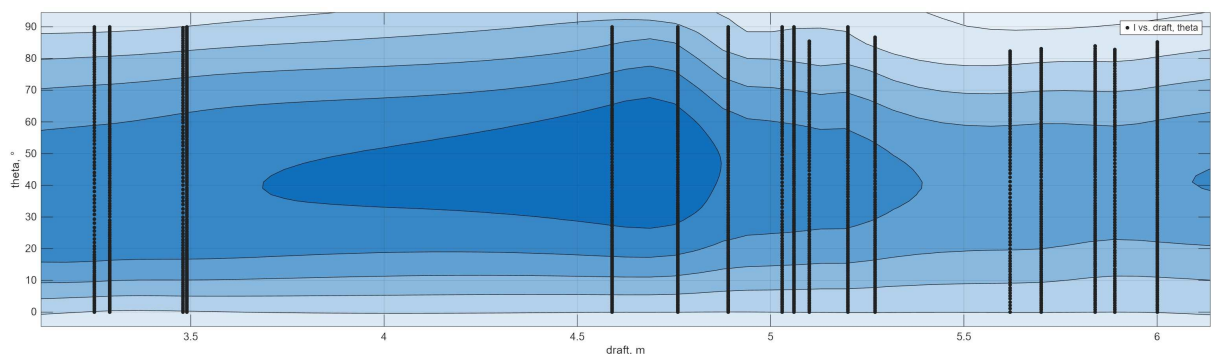


Рис. 11. Контурное изображение поверхности, построенной тонкопластинчатой сплайн-интерполяцией. Ось draft — осадка [м], ось theta — угол крена [град.], ось l — плечо остойчивости [м], цветовая шкала по оси l

Тонкопластинчатая сплайн-интерполяция была разработана специально для аппроксимации разрозненных (англ. scattered) облаков точек, однако нечувствительность метода к данному конкретному распределению исходных данных не позволяет использовать его для решения данной задачи.

2.7. Бигармоническая сплайн-интерполяция.

На рис. 12 показана поверхность, построенная с помощью бигармонической сплайн-интерполяции, а на рис. 13 — ее контурное изображение.

Данный метод показывает наилучшую точность наравне с кубической сплайн-интерполяцией, $R^2 = 1,0$ и $SSE = 4,742 \cdot 10^{-21}$.

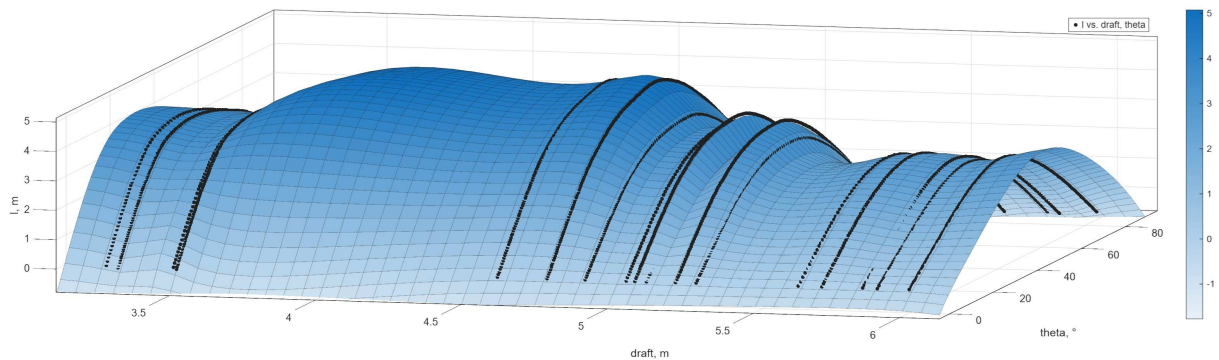


Рис. 12. Вид поверхности, построенной бигармонической сплайн-интерполяцией. Ось draft — осадка [м], ось theta — угол крена [град.], ось l — плечо устойчивости [м], цветовая шкала по оси l. Черным отражены точки исходного набора данных

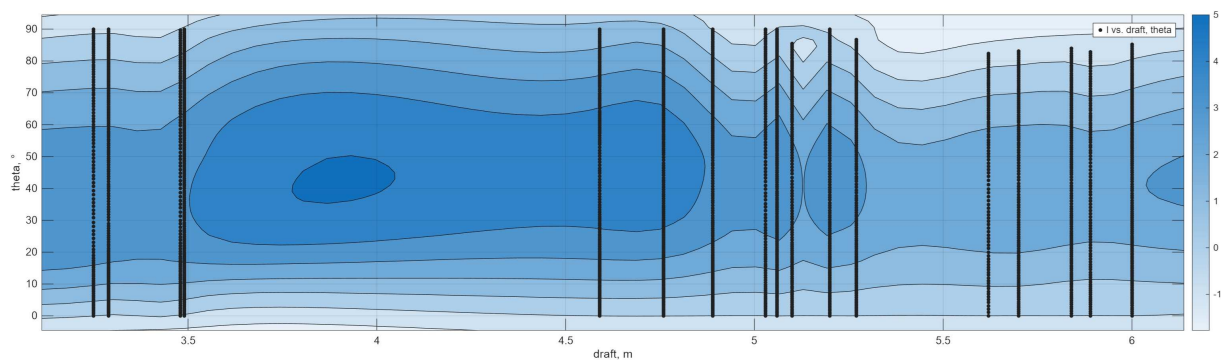


Рис. 13. Контурное изображение поверхности, построенной бигармонической сплайн-интерполяцией. Ось draft — осадка [м], ось theta — угол крена [град.], ось l — плечо устойчивости [м], цветовая шкала по оси l

Сводная таблица с оценками точности примененных методов

Метод	R^2	SSE
Кусочно-линейная интерполяция	1,00000	0,000
Полиномиальная аппроксимация, полином порядка 3	0,93475	255,800
Полиномиальная аппроксимация, полином порядка 5	0,97127	112,640
Кубическая сплайн-интерполяция	1,00000	$4,454 \cdot 10^{-29}$
Тонкопластинчатая сплайн-интерполяция	0,93648	249,03
Бигармоническая сплайн-интерполяция	1,00000	$4,742 \cdot 10^{-21}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была изучена эффективность различных математических методов построения непрерывной аппроксимации сложной поверхности, определяемой набором диаграмм статической остойчивости железнодорожного паромов, при различных условиях загрузки. Сложностью явилось то, что исходные данные для построения аппроксимирующей поверхности представлены нерегулярным, неравномерно распределенным набором точек.

Кусочно-линейная интерполяция продемонстрировала высокую точность аппроксимации исходных данных благодаря своей локальной адаптивности. Однако присущий результирующей поверхности недостаток гладкости делает ее малоприменимой для практического применения в дальнейшем.

Полиномиальная аппроксимация (полиномами третьего и пятого порядка) принципиально не подходит для решения данной задачи. Неспособность метода учесть локальные особенности исходных данных привела к низкому качеству аппроксимирующей поверхности.

Тонкопластинчатая сплайн-интерполяция была разработана для аппроксимации неравномерно распределенных исходных данных, однако обеспечила неожиданно низкую точность, сопоставимую с полиномиальной аппроксимацией. Нечувствительность метода к данному конкретному распределению исходных данных не позволяет использовать его для решения данной задачи.

Кубическая и бигармоническая сплайн-интерполяция оказались наиболее эффективными методами решения поставленной задачи. Оба метода успешно сочетают в себе конкурирующие требования высокой точности и гладкости аппроксимирующей поверхности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kasyk L. The analysis of social and situational systems as components of human errors resulting in navigational accidents / L. Kasyk, A.E. Wolnowska, K. Pleskacz, T. Kapuściński // *Applied Sciences*. — 2023. — Vol. 13, Issue 11. — P. 6780. — DOI 10.3390/app13116780.
2. Гомзяков М.В. Обзор аварийности морских транспортных судов Дальневосточного региона / М.В. Гомзяков // *Научно-технический сборник Российского морского регистра судоходства*. — 2020. — № 58/59. — С. 4 — 10.
3. Кутейников М.А. Критерии риска потери остойчивости судна без хода / М.А. Кутейников, В.Р. Самойлов // *Научно-технический сборник Российского морского регистра судоходства*. — 2019. — № 56/57. — С. 40 — 50.
4. Шульц С.В. Обзор применения искусственных нейронных сетей в задачах моделирования качки автономного судна / С.В. Шульц, М.А. Кутейников, В.Ю. Шульц // *Научно-технический сборник Российского морского регистра судоходства*. — 2025. — № 78. — С. 44 — 50. — EDN UFKSYW.
5. Jimenez-Fernandez V.M. Exploring the use of two-dimensional piecewise-linear functions as an alternative model for representing and processing grayscale-images / V.M. Jimenez-Fernandez, H. Vazquez-Leal, U.A. Filobello-Nino, M. Jimenez-Fernandez et al. // *Journal of Applied Research and Technology*. — 2016. — Vol. 14, No. 5. — P. 311 — 318. — DOI 10.1016/j.jart.2016.09.001.
6. Jimenez-Fernandez V.M. A parametric piecewise-linear approach to laser projection / V.M. Jimenez-Fernandez, H.H. Cerecedo-Nunez, H. Vazquez-Leal, L. Beltran-Parrazal et al. // *Computational and Applied Mathematics*. — 2014. — Vol. 33, Issue 3. — P. 841 — 858.
7. Jimenez-Fernandez V.M. A comparative study between piecewise-linear and point-based methodologies for galvanometer mirror systems / V.M. Jimenez-Fernandez, H. Vazquez-Leal, U.A. Filobello-Nino, H.H. Cerecedo-Nunez et al. // *Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia*. — 2014. — Vol. 73. — P. 124 — 133.
8. Zhang Z.G. High-resolution reconstruction of human brain MRI image based on local polynomial regression / Z.G. Zhang, S.C. Chan, X. Zhang, E.Y. Lam et al. // *4th International IEEE/EMBS conference on neural engineering*. — 2009. — P. 245 — 248.
9. Zhang Z.G. A new two-stage method for restoration of images corrupted by Gaussian and impulse noises using local polynomial regression and edge preserving regularization / Z.G. Zhang, S.C. Chan, Z. Y. Zhu // *IEEE international symposium on circuits and systems*. — 2009. — P. 948 — 951.
10. Karim S.A.A. Cubic spline interpolation for petroleum engineering data / S.A.A. Karim, M.A.M. Rosli, M.I.M. Mustafa // *Applied Mathematical Sciences*. — 2014. — Vol. 8. — P. 5083 — 5098.
11. Karim S.A.A. Seabed logging data curve fitting using cubic splines / S.A.A. Karim, N. Yahya // *Applied Mathematical Sciences*. — 2013. — Vol. 7, No. 81. — P. 4015 — 4026.
12. Ross A. A deformable model for fingerprint matching / A. Ross, S. Dass, A. Jain // *Pattern Recognition*. — 2005. — Vol. 38. — P. 95 — 103. — DOI 10.1016/j.patcog.2003.12.021.
13. Бикеев Е.В. Применение методики аппроксимации сплайном типа «тонких пластин» для определения деформаций крупногабаритного рефлектора / Е.В. Бикеев, Г.И. Калабегашвили // *Наука и образование сегодня*. — 2017. — № 2 (13). — С. 6 — 8.
14. Douglas B.C. The sea state correction for GEOS 3 and SEASAT satellite altimeter data / B.C. Douglas, R.W. Agreen // *Journal of Geophysical Research*. — 1983. — Vol. 88 (C3). — P. 1655 — 1661. — DOI 10.1029/JC088iC03p01655.
15. Munchow A. Detiding three-dimensional velocity survey data in coastal waters / A. Munchow // *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*. — 2000. — Vol. 17, Issue 5. — P. 736 — 748.
16. Feliciano L. Biharmonic spline interpolation for solar radiation mapping using Puerto Rico as a case of study / L. Feliciano, E. Ortiz-Rivera // *Conference Record of the IEEE Photovoltaic Specialists Conference, 2012*. — P. 002913 — 002915. DOI 10.1109/PVSC.2012.6318196.
17. Дебрин А.С. Разработка программных продуктов по моделированию характеристик фотоэлектрических модулей для повышения эффективности работы ФЭС автономных потребителей / А.С. Дебрин, А.Ф. Семенов, А.В. Бастрон, П.Н. Кузьмин // *Известия ОГАУ*. — 2020. — № 3 (83). — С. 222 — 225.

18. Amidror I. Scattered data interpolation methods for electronic imaging systems: a survey / I. Amidror // *Journal of Electronic Imaging*. — 2002. — Vol. 11, No. 2. — P. 157 — 176.
19. Ambrosius F. Interpolation of 3D surfaces for contact modeling / F. Ambrosius // *University of Twente Tech. Rep.* — March 2005. — 51 p.
20. Boor C. de. Bicubic spline interpolation / C. de Boor // *Journal of Mathematics and Physics*. — 1962. — Vol. 41, No. 4. — P. 212 — 218. — DOI 10.1002/sapm1962411212.
21. Bhattacharyya B.K. Bicubic spline interpolation as a method for treatment of potential field data / B.K. Bhattacharyya // *Geophysics*. — 1969. — Vol. 34. — P. 402 — 423. — DOI 10.1190/1.1440019.
22. Briggs I.C. Machine contouring using minimum curvature / I.C. Briggs // *Geophysics*. — 1974. — Vol. 39, No. 1. — P. 39 — 48. — DOI 10.1190/1.1440410.
23. Turley R. Steven. Cubic interpolation with irregularly-spaced points in Julia 1.4 / R. Steven Turley; Brigham Young University // *Faculty Publications*. — 2018. — 2177.
24. Jain R. *Machine Vision* / R. Jain, R. Kasturi, B. Schunck. — McGraw-Hill, 1995. — 549 p.
25. Han X. Representation of piecewise biharmonic surfaces using biquadratic B-Splines / X. Han, J. Han // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. — 2015. — Vol. 290. — P. 403 — 411. — DOI 10.1016/j.cam.2015.05.025.

REFERENCES

1. Kasyk L., Wolnowska A.E., Pleskacz K., Kapuściński T. The analysis of social and situational systems as components of human errors resulting in navigational accidents. *Applied Sciences*. 2023. Vol. 13, Issue 11. P. 6780. DOI 10.3390/app13116780.
2. Gomzyakov M.V. Overview of maritime transport casualties in the Far East. *Research Bulletin by Russian Maritime Register of Shipping*. 2020. No. 58/59. P. 4 — 10. (In Russ.)
3. Kuteinikov M.A., Samoilo V.R. Criteria of risk of stability loss under dead ship condition. *Research Bulletin by Russian Maritime Register of Shipping*. 2019. No. 56/57. P. 40 — 50. (In Russ.)
4. Shults S.V., Kuteinikov M.A., Shults V.Yu. An overview of application of artificial neural networks in modeling motions of autonomous ship. *Research Bulletin by Russian Maritime Register of Shipping*. 2025. No. 78. P. 44 — 50. EDN UFKSYW. (In Russ.)
5. Jimenez-Fernandez V.M., Vazquez-Leal H., Filobello-Nino U.A., Jimenez-Fernandez M. et al. Exploring the use of two-dimensional piecewise-linear functions as an alternative model for representing and processing grayscale-images. *Journal of Applied Research and Technology*. 2016. Vol. 14, No. 5. DOI 10.1016/j.jart.2016.09.001.
6. Jimenez-Fernandez V.M., Cerecedo-Nunez H.H., Vazquez-Leal H., Beltran-Parrazal L. et al. A parametric piecewise-linear approach to laser projection. *Computational and Applied Mathematics*. 2014. Vol. 33, Issue 3. P. 841 — 858.
7. Jimenez-Fernandez V.M., Vazquez-Leal H., Filobello-Nino U., Cerecedo-Nunez H.H. et al. A comparative study between piecewise-linear and point-based methodologies for galvanometer mirror systems. *Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia*. 2014. Vol. 73. P. 124 — 133.
8. Zhang Z.G., Chan S.C., Zhang X., Lam E.Y. et al. High-resolution reconstruction of human brain MRI image based on local polynomial regression. *4th International IEEE/EMBS conference on neural engineering*. 2009. P. 245 — 248.
9. Zhang Z.G., Chan S.C., Zhu Z.Y. A new two-stage method for restoration of images corrupted by Gaussian and impulse noises using local polynomial regression and edge preserving regularization. *IEEE international symposium on circuits and systems*. 2009. P. 948 — 951.
10. Karim S.A.A., Rosli M.A.M., Mustafa M.I.M. Cubic spline interpolation for petroleum engineering data. *Applied Mathematical Sciences*. 2014. Vol. 8. P. 5083 — 5098.
11. Karim S.A.A., Yahya N. Seabed logging data curve fitting using cubic splines. *Applied Mathematical Sciences*. 2013. Vol. 7, No. 81. P. 4015 — 4026.
12. Ross A., Dass S., Jain A. A deformable model for fingerprint matching. *Pattern Recognition*. 2005. Vol. 38. P. 95 — 103. DOI 10.1016/j.patcog.2003.12.021.
13. Bikeev E.V., Kalabegashvili G.I. Primenenie metodiki approksimatsii splainom tipa «tonkikh plastin» dlya opredeleniya deformatsii krupnogabaritnogo reflektora [Application of the thin-plate spline approximation technique to determine the deformations of a large-sized reflector]. *Nauka i obrazovanie segodnya [Science and Education Today]*. 2017. No. 2 (13). P. 6 — 8.
14. Douglas B.C., Agreen R.W. The sea state correction for GEOS 3 and SEASAT satellite altimeter data. *Journal of Geophysical Research*. 1983. Vol. 88 (C3). P. 1655 — 1661. DOI 10.1029/JC088iC03p01655.
15. Munchow A. Detiding three-dimensional velocity survey data in coastal waters. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*. 2000. Vol. 17, Issue 5. P. 736 — 748.
16. Feliciano L., Ortiz-Rivera E. Biharmonic spline interpolation for solar radiation mapping using Puerto Rico as a case of study. *Conference Record of the IEEE Photovoltaic Specialists Conference*. 2012. P. 002913 — 002915. DOI 10.1109/PVSC.2012.6318196.
17. Debrin A.S., Semenov A.F., Bastron A.V., Kuzmin P.N. Development of software products for modeling the characteristics of photovoltaic modules to increase the FSES operation efficiency of autonomous consumers. *Izvestia. Orenburg State Agrarian University*. 2020. No. 3 (83). P. 222 — 225. (In Russ.)
18. Amidror I. Scattered data interpolation methods for electronic imaging systems: a survey. *Journal of Electronic Imaging*. 2002. Vol. 11, No. 2. P. 157 — 176.
19. Ambrosius F. Interpolation of 3D surfaces for contact modeling. *University of Twente Tech. Rep.* March 2005. 51 p.
20. Boor C. de. Bicubic spline interpolation. *Journal of Mathematics and Physics*. 1962. Vol. 41, No. 4. P. 212 — 218. DOI 10.1002/sapm1962411212.
21. Bhattacharyya B.K. Bicubic spline interpolation as a method for treatment of potential field data. *Geophysics*. 1969. Vol. 34. P. 402 — 423. DOI 10.1190/1.1440019.
22. Briggs I.C. Machine contouring using minimum curvature. *Geophysics*. 1974. Vol. 39, No. 1. P. 39 — 48. DOI 10.1190/1.1440410.
23. Turley, R. Steven. Cubic interpolation with irregularly-spaced points in Julia 1.4 / Brigham Young University. *Faculty Publications*. 2018. 2177.
24. Jain R., Kasturi R., Schunck B. *Machine Vision*. McGraw-Hill, 1995. 549 p.
25. Han X., Han J. Representation of piecewise biharmonic surfaces using biquadratic B-Splines. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2015. Vol. 290. P. 403 — 411. DOI 10.1016/j.cam.2015.05.025.